

Олимпиада по математике «Путь к успеху» 2 тур

11 класс

Каждая задача оценивается в 5 баллов. Необходимо предоставить подробное решение каждой из предлагаемых задач.

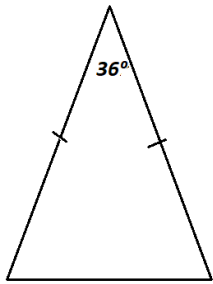
1. В волшебном саду растёт один волшебный цветок. Если его сорвать, то вместо него мгновенно вырастают пять таких же волшебных цветов. Однажды в саду гуляли дети, и каждый унёс с собой букетик волшебных цветов. После их ухода садовник насчитал 2023 цветка. Докажите, что садовник ошибся.

2. Решите в целых числах уравнение

$$xy - x^2 = 5 - x$$

3. Найдите значение выражения

$$\log_3 \operatorname{tg} 20^\circ + \log_3 \operatorname{tg} 40^\circ + \log_3 \operatorname{tg} 60^\circ + \log_3 \operatorname{tg} 80^\circ$$



4. Используя рисунок, найдите $\cos 72^\circ$.

5. Определите количество целых решений системы неравенств:

$$\begin{cases} x + |y - 1| \leq 3, \\ |y - 1| \leq \sqrt{3 + 2x - x^2}. \end{cases}$$

6. Решите функциональное уравнение

$$f(x) - 4x^2 - 14x = \frac{4}{x^2} + \frac{18}{x} - 3f\left(\frac{1}{x}\right).$$

7. Решите иррациональное уравнение:

$$\sqrt{\frac{1 + 2x\sqrt{1 - x^2}}{2}} + 2x^2 = 1.$$

8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BE_1 .