

Олимпиада по математике «Путь к успеху» 2 тур
10 класс

Каждая задача оценивается в 5 баллов. Необходимо предоставить подробное решение каждой из предлагаемых задач.

1. Голодная акула, чтобы почувствовать себя сытой, должна съесть трёх таких же акул, как она сама (голодных или сытых). В аквариум выпустили 30 голодных акул. Сколько акул останется в аквариуме?

2. В зоопарке на завтрак годовалой мартышке дают 2 банана, двухгодовалой – 4 банана, трёхгодовалой – 6 бананов. Всего в вольере 12 особей и каждого возраста присутствует хотя бы одна особь. На всех требуется 60 бананов. Найдите, сколько мартышек каждого возраста в вольере.

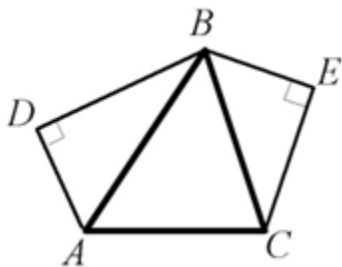
3. Докажите, что

$$\frac{2023^2 + 2024^2}{2023 \cdot 2024} + \frac{2025^2 + 2026^2}{2025 \cdot 2026} + \dots + \frac{6069^2 + 6070^2}{6069 \cdot 6070} > 2^{2024}$$

4. В выпуклом четырехугольнике длина отрезка, соединяющего середины противоположных сторон равна 10. Найдите длину отрезка, соединяющего середины двух других противоположных сторон, если диагонали четырехугольника перпендикулярны.

5. Кривая задана уравнением $x^2 + y - x - xy - 2 = 0$. Найдите все точки с целочисленными координатами, через которые проходит эта кривая.

6. На плоскости даны треугольник ABC и такие точки D и E , что $\angle ADB = \angle BEC = 90^\circ$. Докажите, что длина отрезка DE не превосходит полупериметра треугольника ABC . (На рисунке показано лишь одно из возможных положений точек).



7. Решите уравнение

$$\sin^2 x + 3x^2 \cos x + 3x^2 = 0.$$

8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 5, найдите расстояние от точки A до прямой $C_1 D_1$.